

UNIDAD III LEVAS

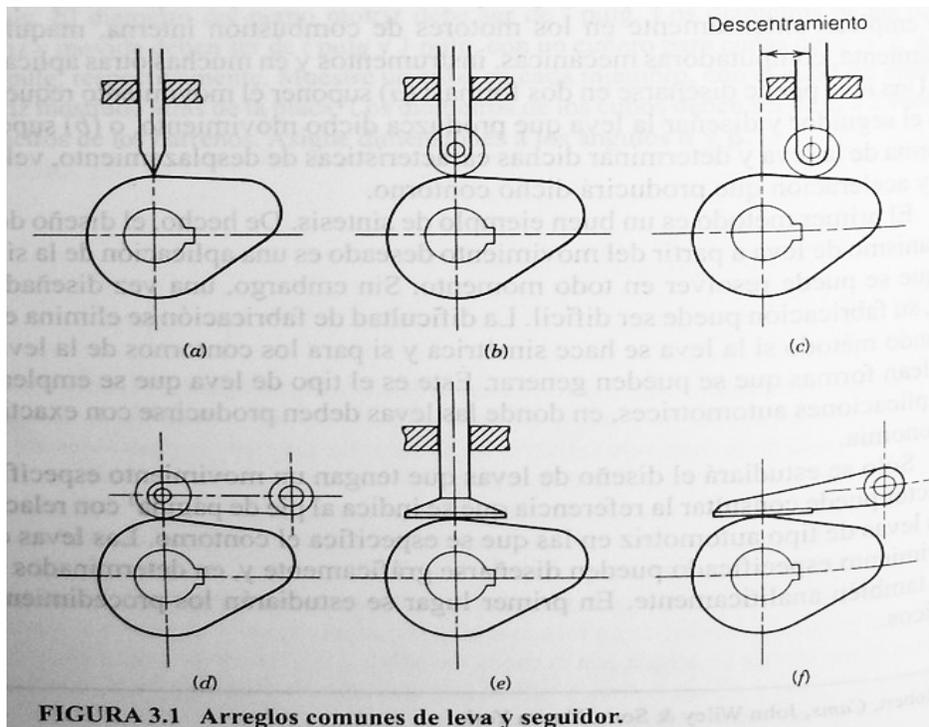
3.1 NOMENCLATURA, CLASIFICACIÓN Y APLICACIÓN DE LEVAS Y SEGUIDORES.

Las levas desempeñan un papel muy importante dentro de la maquinaria moderna y se emplean extensamente en los motores de combustión interna, maquinas-herramienta, computadoras mecánicas, instrumentos y muchas otras aplicaciones. Una leva puede diseñarse en dos formas: **(a)** suponer el movimiento requerido para el seguidor y diseñar la leva que produzca dicho movimiento, o **(b)** suponer la forma de la leva y determinar dichas características de desplazamiento, velocidad y aceleración que producirá dicho contorno.

El primer método es un buen ejemplo de síntesis. De hecho, el diseño de un mecanismo de leva a partir del movimiento deseado es una aplicación de la síntesis que se puede resolver en todo momento. Sin embargo, una vez diseñada la leva, su fabricación puede ser difícil. La dificultad de fabricación se elimina en el segundo método si la leva se hace simétrica y para los contornos de la leva se emplean formas que se pueden generar. Este es el tipo de leva que se emplean en las aplicaciones automotrices, en donde las levas deben producirse con exactitud y economía.

Clasificación de las levas y su nomenclatura.

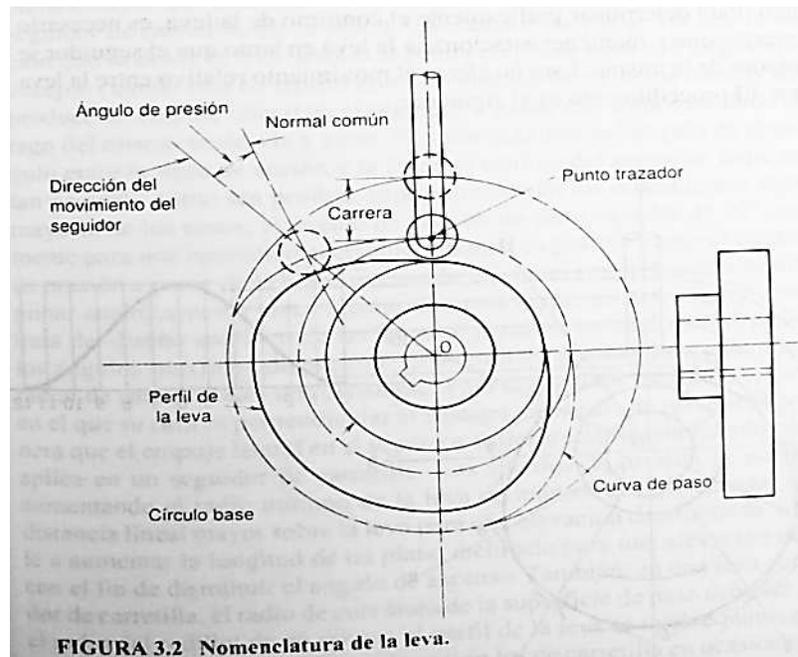
En la práctica la mayoría de los pares de levas se encuentran en mecanismos simples de leva y seguidor que solo contiene tres eslabones; los dos eslabones del par de la leva y un eslabón de piso o base. Los mecanismos de leva pueden clasificarse según el tipo de leva o según la forma, movimiento o ubicación del seguidor. El mecanismo de leva más sencillo y que se emplea más frecuentemente es una leva de disco giratorio con seguidor recíprocante u oscilatorio. La **figura 3.1** muestra una leva de disco con seis arreglos diferentes para el seguidor.



La **figura 3.1a** muestra una leva de disco con seguidor con aristas de cuchilla en línea. El seguidor se considera en *línea* (o *radial*) cuando su línea de centros pasa por el centro de rotación de la leva. Este tipo de seguidores es de interés teórico pero no es de gran importancia práctica debido a que generalmente produce esfuerzos de contacto elevados. La **figura 3.1b** muestra una leva de disco con un seguidor de carretilla en línea. La **figura 3.1c** es una leva de disco con un seguidor de carretilla descentrado. En cada uno de los mecanismos de leva y seguidor de las **figuras 3.1 a, b y c** la leva gira, en tanto que el seguidor tiene un movimiento recíprocante. La **figura 3.1d** corresponde a un leva de disco con un seguidor de carretilla

oscilatorio. La **figura 3.1e** muestra una leva de disco con seguidores de cara plana con movimiento recíprocante. En este último caso no es necesario distinguir entre seguidores en línea y descentrados ya que cinemáticamente son equivalentes; cualquier vástago de seguidor paralelo al que se muestra producirá el mismo movimiento de salida. Sin embargo, podría ser necesario cambiar la longitud de la cara del seguidor cuando este está descentrado. La **figura 3.1f** es una leva de disco con seguidor oscilatorio de cara plana.

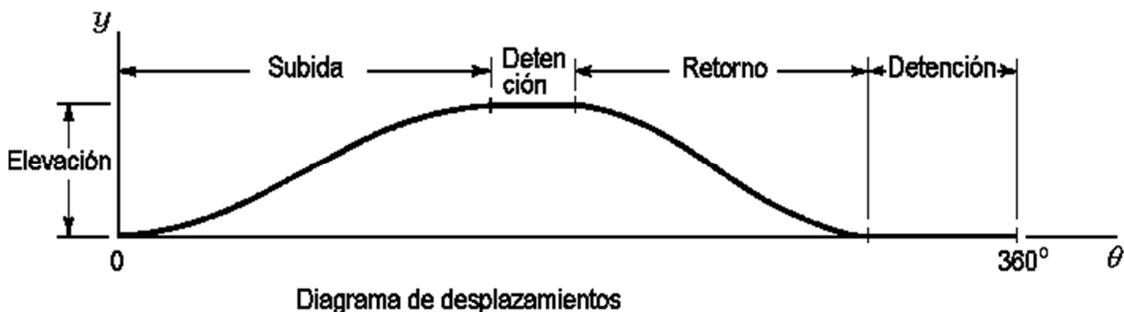
La **figura 3.2** muestra la nomenclatura que se emplea para describir un mecanismo de leva típico. El **punto de trazo** es un punto en el seguidor que corresponde al punto de contacto de un seguidor ficticio de arista de cuchilla. El punto de trazo de un seguidor de carretilla es el centro del rodillo. La **curva de paso** es la trayectoria del punto de trazo relativa a la leva. El **círculo base** es el círculo más pequeño tangente a la superficie de la leva alrededor del centro de rotación de la misma. El **ángulo de presión** es el ángulo entre la dirección del movimiento del punto de trazo y la normal común (*la línea de acción*) a las superficies de contacto. El ángulo de presión es una medida de las propiedades de transmisión de fuerza instantánea del mecanismo. El **alcance, elevación o carrera**, es la distancia entre las dos posiciones extremas del seguidor.



Diagramas de desplazamiento.

Por lo general, un sistema de leva es un dispositivo con un grado de libertad (1 GDL). Es impulsado por un movimiento de entrada conocido $\theta(t)$, casi siempre un eje que gira a velocidad constante, obteniéndose un movimiento de salida predeterminado (y) para el seguidor. Es importante observar que y es una distancia de traslación para un seguidor de movimiento alternativo; pero en un ángulo para un seguidor oscilante.

Durante la rotación de la leva a lo largo de un ciclo del movimiento de entrada, el seguidor ejecuta una serie de eventos como los que se muestran gráficamente en el “*diagrama de desplazamientos*” de la figura siguiente:



La abscisa representa un ciclo del movimiento de entrada θ (una revolución de la leva) y se dibuja a cualquier escala conveniente. La ordenada representa el recorrido y del seguidor y, en el caso de un seguidor de movimiento alternativo, se dibuja casi siempre a una escala completa para ayudar al trazado de la leva.

En el diagrama de desplazamientos se identifican porciones tales como:

- **Subida.-** En este tramo el movimiento del seguidor es hacia fuera del centro de la leva.
- **Elevación.-** Es el máximo valor de la subida.
- **Detenciones.-** Son los períodos durante los cuales el seguidor se encuentra en reposo.
- **Retorno.-** Es el período en que el desplazamiento del seguidor es hacia el centro de la leva.

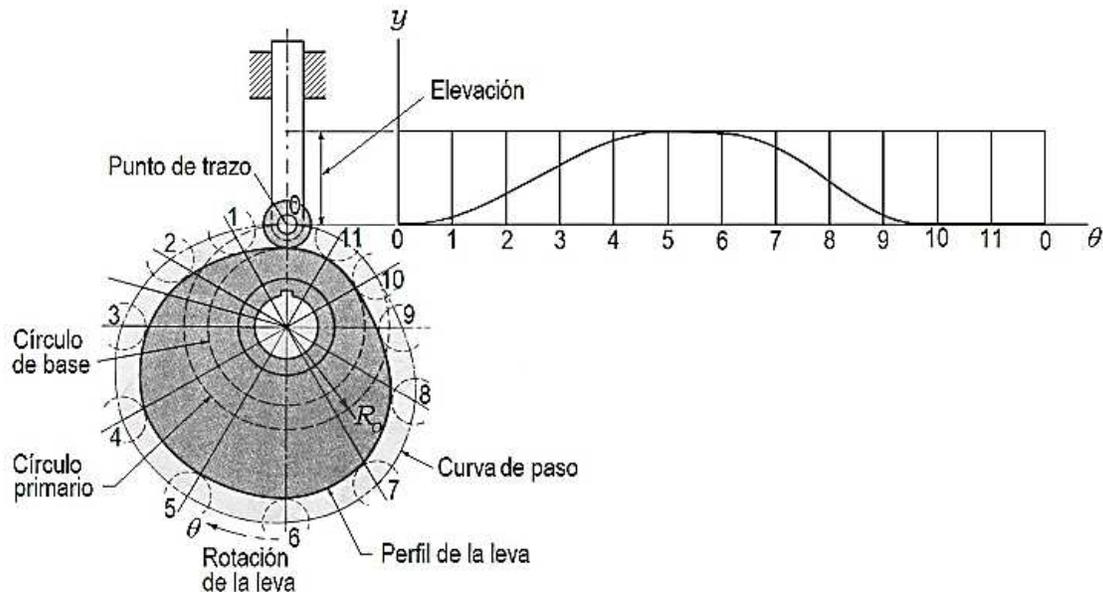
Uno de los pasos claves en el diseño de una leva es la correcta selección de las formas apropiadas de los movimientos de subida y de retorno, la elevación total y la duración de las detenciones. Estas características generalmente dependen de las necesidades de la aplicación.

Una vez que se han elegido las formas apropiadas para estos movimientos, queda establecida la relación exacta entre la entrada $\theta(t)$ y la salida y , y se construye con precisión el diagrama de desplazamientos, el cual es una representación gráfica de la relación funcional $y = y(\theta)$. Esta relación contiene en su expresión misma la naturaleza exacta del perfil de la leva final, la información necesaria para su trazado y fabricación, y también las características importantes que determinan la calidad de su comportamiento dinámico.

3.2 DISEÑO GRÁFICO Y ANALÍTICO DEL PERFIL DE LEVAS PLANAS.

El diseño gráfico del perfil de una leva, consiste en trazar el perfil apropiado de la leva para lograr el movimiento del seguidor representado en el diagrama de desplazamientos dado.

A continuación se representa una **leva de placa con seguidor radial de rodillo**, en la cual se observa una nomenclatura adicional.



De acuerdo con la leva representada en la figura, podemos identificar algunos términos básicos, tales como:

Punto de trazo.- Es un punto teórico del seguidor, el cual se elige en el centro de un seguidor de rodillo o sobre la superficie de un seguidor de cara plana.

Curva de paso.- Es el lugar geométrico generado por el punto de trazo, conforme el seguidor se mueve en relación con la leva. Para un seguidor de cuña, la curva de paso y la superficie de la leva son idénticas. En el caso de un seguidor de rodillo, está, separadas por el radio del rodillo.

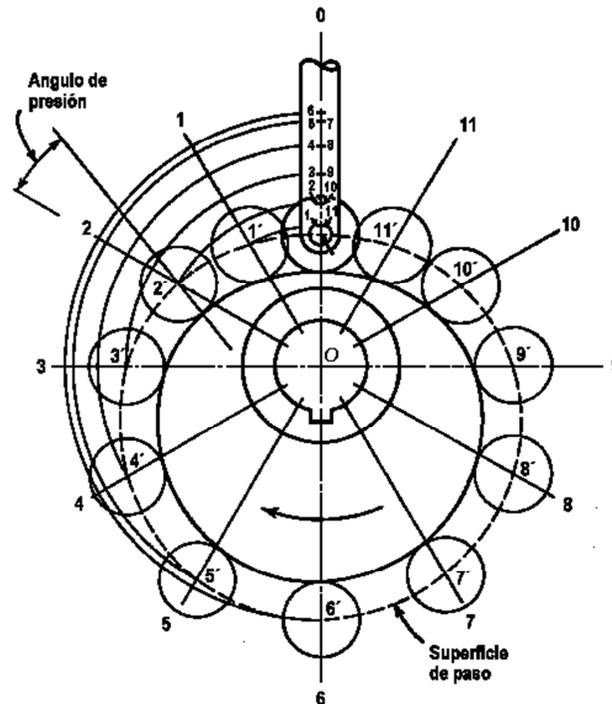
Círculo primario R_0 .- Es el más pequeño que se puede trazar con centro en el eje de rotación de la leva y tangente a la curva de paso.

Círculo de base.- Es el círculo más pequeño con centro sobre el eje de rotación de la leva y tangente a la superficie de ésta. En el caso de un seguidor de rodillo, es el más pequeño que el círculo primario, siendo la diferencia el radio del rodillo y, en el caso de un seguidor de cara plana, es idéntico al círculo primario.

Al construir un perfil de leva se aplica el principio de inversión cinemática, imaginando que la leva es estacionaria y haciendo que el seguidor gire en sentido opuesto a la dirección de rotación de la leva, tal y como se indica en la figura anterior. Posteriormente se deben llevar a cabo los pasos siguientes:

1. Se traza el círculo primario de radio R_o , y dividirlo en cierto número de segmentos.
2. Se asignan números de estación a los límites de dichos segmentos.
3. Se divide la abscisa del diagrama de desplazamientos en segmentos correspondientes, transfiriendo las distancias, por medio de divisores, del diagrama de desplazamientos directamente sobre el trazado de la leva, a fin de localizar las posiciones correspondientes al punto de trazo.
4. Una curva suave que pase por estos puntos es la curva de paso. En el caso de un seguidor de rodillo, simplemente se dibuja el rodillo en su posición apropiada en cada estación y luego se construye el perfil de la leva como una curva suave tangente a todas las posiciones del rodillo.

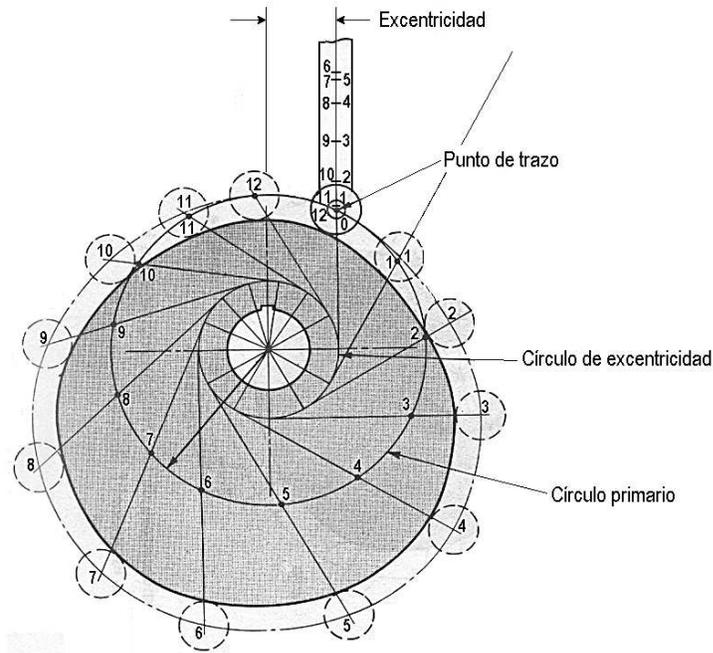
El procedimiento anterior se refuerza con la siguiente figura:



Leva de disco con seguidor radial de rodillo.

En la siguiente figura se muestra cómo se debe modificar el método de construcción para una **leva de placa con seguidor excéntrico de rodillo**. Se siguen los siguientes pasos:

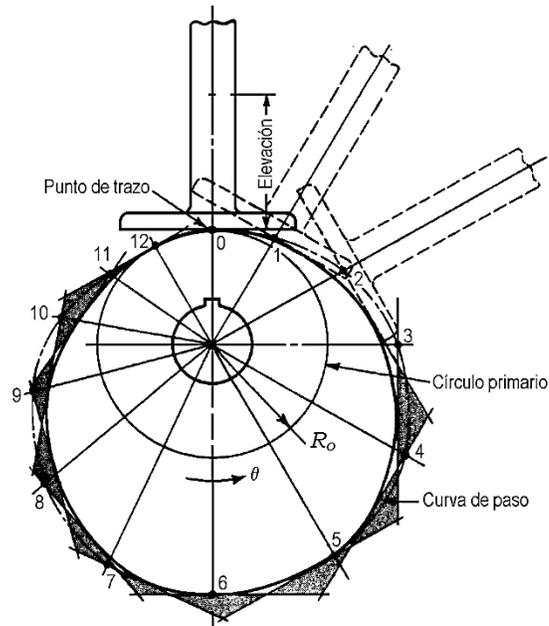
1. Se construye un círculo de excentricidad, usando un radio igual a la magnitud de la excentricidad.
2. Identificar los números de estación en torno al círculo primario y se construye la línea central del seguidor para cada estación, haciéndola tangente al círculo de excentricidad.
3. Se establecen los centros del rodillo para cada estación, transfiriendo las distancias del diagrama de desplazamientos directamente a estas líneas centrales del seguidor, midiendo siempre hacia afuera desde el círculo primario.



Leva de disco con seguidor de rodillo excéntrico.

En la siguiente figura se muestra la construcción para una **leva de placa con seguidor de cara plana**. Se siguen los siguientes pasos:

1. Se traza el círculo primario de radio R_o , y dividirlo en cierto número de segmentos.
2. Se asignan números de estación a los límites de dichos segmentos.
3. Se divide la abscisa del diagrama de desplazamientos en segmentos correspondientes, transfiriendo las distancias, por medio de divisores, del diagrama de desplazamientos directamente sobre el trazado de la leva, a fin de localizar las posiciones correspondientes al punto de trazo.
4. Una curva suave que pase por estos puntos es la curva de paso. Se construye en cada posición una recta que represente la cara plana del seguidor. Es útil extender cada recta que represente una posición de la cara del seguidor, para formar una serie de triángulos. Si éstos se sombreen ligeramente, como se muestra, será más fácil trazar el perfil de la leva, dentro de todos los triángulos sombreados y tangente a los lados interiores de los triángulos.



3.3.- ANÁLISIS DE DIAGRAMAS Y CURVAS DE DESPLAZAMIENTO, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN PARA EL SEGUIDOR.

El diagrama de desplazamientos es una gráfica que representa alguna función matemática que relaciona **los movimientos de entrada y salida** del sistema de leva; esto es

$$y = y(\theta) \text{-----} (3.1)$$

La primera derivada de y con respecto al ángulo θ es

$$y' = \frac{dy}{d\theta} \text{-----} (3.2)$$

Esta expresión representa **la pendiente del diagrama de desplazamientos** en cada ángulo θ , y es una medida de "*lo empinado*" del diagrama de desplazamientos.

La segunda derivada de y con respecto al ángulo θ es

$$y'' = \frac{d^2y}{d\theta^2} \text{-----} (3.3)$$

Esta expresión está relacionada con el **radio de curvatura de la leva** en varios puntos a lo largo de su perfil. Conforme y'' se hace grande, el radio de curvatura se hace muy pequeño; si y'' se hace infinita, el perfil de la leva se hace puntiaguda en esa posición, lo que no es satisfactorio.

La siguiente derivada también se puede representar gráficamente, si se desea:

$$y''' = \frac{d^3y}{d\theta^3} \text{-----} (3.4)$$

Esta expresión (**se denomina tirón**) no es fácil describirla geoméricamente, sin embargo se debe controlar al elegir la forma detallada del diagrama de desplazamientos ya que **da la rapidez de cambio de y''** (radio de curvatura).

Movimiento del seguidor.

Hasta ahora se han relacionado las derivadas cinemáticas del movimiento del seguidor con respecto a el ángulo de giro de la leva θ . Se supondrá que se conoce $\theta = \theta(t)$ de la leva. También

su velocidad angular $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, su aceleración angular $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ y su siguiente derivada, llamada

con frecuencia "tirón" o segunda aceleración $\dot{\alpha} = \frac{d^3\theta}{dt^3}$

Partiendo de la ecuación general del diagrama de desplazamientos:

$$y = y(\theta) \quad \theta = \theta(t)$$

Derivando respecto del tiempo:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

Esto es:

$$\dot{y} = y' \omega \text{-----} (3.5)$$

De la misma forma, la aceleración y el tirón del seguidor están dados por:

$$\ddot{y} = \frac{d}{dt}(y' \omega) = y' \frac{d\omega}{dt} + \omega \left(\frac{dy'}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \right)$$

$$\boxed{\dot{y} = y''\omega^2 + y'\alpha} \text{----- (3.6)}$$

$$\ddot{y} = \frac{d}{dt}(y''\omega^2 + y'\alpha) = \frac{d}{dt}(y''\omega^2) + \frac{d}{dt}(y'\alpha)$$

$$= y''\frac{d}{dt}(\omega^2) + \omega^2\frac{d}{dt}(y'') + y'\frac{d\alpha}{dt} + \alpha\frac{dy'}{dt}$$

$$\ddot{y} = 2y''\omega\frac{d\omega}{dt} + \omega^2\frac{dy''}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + y'\dot{\alpha} + \alpha\frac{dy'}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$= 2y''\omega\dot{\alpha} + y'''\omega^3 + y'\dot{\alpha} + y''\omega\dot{\alpha}$$

$$\ddot{y} = y'''\omega^3 + 3y''\omega\dot{\alpha} + y'\dot{\alpha} \text{----- (3.7)}$$

Cuando la velocidad del eje de la leva es constante, las expresiones anteriores se reducen a

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{y} = y'\omega \\ \ddot{y} = y''\omega^2 \\ \ddot{y} = y'''\omega^3 \end{array}} \text{----- (3.8)}$$

Movimientos estándar de levas.

A continuación se presentan las ecuaciones para cierto **tipo estándar de curvas** de desplazamientos que es factible emplear para resolver requisitos de movimientos de levas de gran velocidad. En cada figura se muestra el diagrama de desplazamientos y sus derivadas.

Después, se mostrará cómo las graficas y las ecuaciones presentadas pueden reducir enormemente el esfuerzo analítico comprendido en el diseño del diagrama completo de desplazamientos para una leva de alta velocidad.

En los diagramas siguientes conviene destacar lo siguiente:

1. Cada grafica incluye sólo una sección de un diagrama de desplazamientos completo; la elevación total para esa sección se identifica como **L** en todos los casos y el recorrido total de leva se denota por **β**. La abscisa de cada grafica esta normalizada de tal manera que la razón **θ/β** varia desde **0** en el extremo izquierdo hasta la unidad en el extremo derecho (**θ=β**).
2. Los movimientos estándar para levas de esta sección no forman un conjunto exhaustivo; pero es factible formar levas con buenas características dinámicas partiendo de una amplia variedad de otras curvas de movimiento posibles. Sin embargo, el conjunto aquí presentado es suficiente para la mayor parte de las aplicaciones.

Se estudiará cómo se pueden unir los diagramas con el fin de formar la especificación de movimiento para una leva completa. El procedimiento consiste en determinar los valores apropiados de **L** y **β** para cada segmento, de tal manera que se cumplan las siguientes situaciones:

1. Los diagramas de desplazamiento, velocidad y aceleración sean continuos a través de las fronteras de los segmentos. El diagrama de **tirón** puede admitir discontinuidades si es necesario, pero no debe hacerse infinito.
2. Las magnitudes máximas de los picos de velocidad y aceleración se mantengan tan bajos como sea posible, coherente con las dos condiciones previas.

El procedimiento se comprenderá mejor si se aplica a un ejemplo.

TIPO DE MOVIMIENTO	GRAFICA
<p>1.- Movimiento armónico simple de subida completa:</p> $y = \frac{L}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi\theta}{\beta} \right)$ $y' = \frac{\pi L}{2\beta} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{\beta}$ $y'' = \frac{\pi^2 L}{2\beta^2} \cos \frac{\pi\theta}{\beta}$ $y''' = -\frac{\pi^3 L}{2\beta^3} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{\beta}$	
<p>2.- Movimiento armónico simple de retorno completo:</p> $y = \frac{L}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi\theta}{\beta} \right)$ $y' = -\frac{\pi L}{2\beta} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{\beta}$ $y'' = -\frac{\pi^2 L}{2\beta^2} \cos \frac{\pi\theta}{\beta}$ $y''' = \frac{\pi^3 L}{2\beta^3} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{\beta}$	
<p>3.- Movimiento cicloidal de subida completa:</p> $y = L \left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi\theta}{\beta} \right)$ $y' = \frac{L}{\beta} \left(1 - \cos \frac{2\pi\theta}{\beta} \right)$ $y'' = \frac{2\pi L}{\beta^2} \operatorname{sen} \frac{2\pi\theta}{\beta}$ $y''' = \frac{4\pi^2 L}{\beta^3} \cos \frac{2\pi\theta}{\beta}$	
<p>4.- Movimiento cicloidal de retorno completo:</p> $y = L \left(1 - \frac{\theta}{\beta} + \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi\theta}{\beta} \right)$ $y' = -\frac{L}{\beta} \left(1 - \cos \frac{2\pi\theta}{\beta} \right)$ $y'' = -\frac{2\pi L}{\beta^2} \operatorname{sen} \frac{2\pi\theta}{\beta}$ $y''' = -\frac{4\pi^2 L}{\beta^3} \cos \frac{2\pi\theta}{\beta}$	

TIPO DE MOVIMIENTO	GRAFICA
<p>5.- Movimiento armónico modificado de subida completa:</p> $y = \frac{L}{2} \left[\left(1 - \cos \frac{\pi\theta}{\beta} \right) - \frac{1}{4} \left(1 - \cos \frac{2\pi\theta}{\beta} \right) \right]$ $y' = \frac{\pi L}{2\beta} \left(\text{sen} \frac{\pi\theta}{\beta} - \frac{1}{2} \text{sen} \frac{2\pi\theta}{\beta} \right)$ $y'' = \frac{\pi^2 L}{2\beta^2} \left(\cos \frac{\pi\theta}{\beta} - \cos \frac{2\pi\theta}{\beta} \right)$ $y''' = -\frac{\pi^3 L}{2\beta^3} \left(\text{sen} \frac{\pi\theta}{\beta} - 2 \text{sen} \frac{2\pi\theta}{\beta} \right)$	
<p>6.- Movimiento armónico modificado de retorno completo:</p> $y = \frac{L}{2} \left[\left(1 + \cos \frac{\pi\theta}{\beta} \right) - \frac{1}{4} \left(1 - \cos \frac{2\pi\theta}{\beta} \right) \right]$ $y' = -\frac{\pi L}{2\beta} \left(\text{sen} \frac{\pi\theta}{\beta} + \frac{1}{2} \text{sen} \frac{2\pi\theta}{\beta} \right)$ $y'' = -\frac{\pi^2 L}{2\beta^2} \left(\cos \frac{\pi\theta}{\beta} + \cos \frac{2\pi\theta}{\beta} \right)$ $y''' = \frac{\pi^3 L}{2\beta^3} \left(\text{sen} \frac{\pi\theta}{\beta} + 2 \text{sen} \frac{2\pi\theta}{\beta} \right)$	
<p>7.- Movimiento polinomial 3-4-5 de subida completa:</p> $y = L \left[10 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^3 - 15 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^4 + 6 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^5 \right]$ $y' = \frac{30L}{\beta} \left[\left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2 - 2 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^3 + \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^4 \right]$ $y'' = \frac{60L}{\beta^2} \left[\frac{\theta}{\beta} - 3 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2 + 2 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^3 \right]$ $y''' = \frac{60L}{\beta^3} \left[1 - 6 \frac{\theta}{\beta} + 6 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2 \right]$	
<p>8.- Movimiento polinomial 3-4-5 de retorno completo:</p> $y = L \left[1 - 10 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^3 + 15 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^4 - 6 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^5 \right]$ $y' = -\frac{30L}{\beta} \left[\left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2 - 2 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^3 + \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^4 \right]$ $y'' = -\frac{60L}{\beta^2} \left[\frac{\theta}{\beta} - 3 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2 + 2 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^3 \right]$ $y''' = -\frac{60L}{\beta^3} \left[1 - 6 \frac{\theta}{\beta} + 6 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2 \right]$	

TIPO DE MOVIMIENTO	GRAFICA
<p>9.- Movimiento semiarmónico de subida:</p> $y = L \left(1 - \cos \frac{\pi\theta}{2\beta} \right)$ $y' = \frac{\pi L}{2\beta} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{2\beta}$ $y'' = \frac{\pi^2 L}{4\beta^2} \cos \frac{\pi\theta}{2\beta}$ $y''' = -\frac{\pi^3 L}{8\beta^3} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{2\beta}$	
<p>10.- Movimiento semiarmónico de subida:</p> $y = L \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{2\beta}$ $y' = \frac{\pi L}{2\beta} \cos \frac{\pi\theta}{2\beta}$ $y'' = -\frac{\pi^2 L}{4\beta^2} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{2\beta}$ $y''' = -\frac{\pi^3 L}{8\beta^3} \cos \frac{\pi\theta}{2\beta}$	
<p>11.- Movimiento semiarmónico de retorno:</p> $y = L \cos \frac{\pi\theta}{2\beta}$ $y' = -\frac{\pi L}{2\beta} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{2\beta}$ $y'' = -\frac{\pi^2 L}{4\beta^2} \cos \frac{\pi\theta}{2\beta}$ $y''' = \frac{\pi^3 L}{8\beta^3} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{2\beta}$	
<p>12.- Movimiento semiarmónico de retorno:</p> $y = L \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{2\beta} \right)$ $y' = -\frac{\pi L}{2\beta} \cos \frac{\pi\theta}{2\beta}$ $y'' = \frac{\pi^2 L}{4\beta^2} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{2\beta}$ $y''' = \frac{\pi^3 L}{8\beta^3} \cos \frac{\pi\theta}{2\beta}$	

TIPO DE MOVIMIENTO	GRAFICA
<p>13.- Movimiento semicicloidal de subida:</p> $y = L \left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{\beta} \right)$ $y' = \frac{L}{\beta} \left(1 - \cos \frac{\pi\theta}{\beta} \right)$ $y'' = \frac{\pi L}{\beta^2} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{\beta}$ $y''' = \frac{\pi^2 L}{\beta^3} \cos \frac{\pi\theta}{\beta}$	
<p>14.- Movimiento semicicloidal de subida:</p> $y = L \left(\frac{\theta}{\beta} + \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{\beta} \right)$ $y' = \frac{L}{\beta} \left(1 + \cos \frac{\pi\theta}{\beta} \right)$ $y'' = -\frac{\pi L}{\beta^2} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{\beta}$ $y''' = -\frac{\pi^2 L}{\beta^3} \cos \frac{\pi\theta}{\beta}$	
<p>15.- Movimiento semicicloidal de retorno:</p> $y = L \left(1 - \frac{\theta}{\beta} + \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{\beta} \right)$ $y' = -\frac{L}{\beta} \left(1 - \cos \frac{\pi\theta}{\beta} \right)$ $y'' = -\frac{\pi L}{\beta^2} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{\beta}$ $y''' = -\frac{\pi^2 L}{\beta^3} \cos \frac{\pi\theta}{\beta}$	
<p>16.- Movimiento semicicloidal de retorno:</p> $y = L \left(1 - \frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{\beta} \right)$ $y' = -\frac{L}{\beta} \left(1 + \cos \frac{\pi\theta}{\beta} \right)$ $y'' = \frac{\pi L}{\beta^2} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{\beta}$ $y''' = \frac{\pi^2 L}{\beta^3} \cos \frac{\pi\theta}{\beta}$	

Ejemplo:

Una leva de placa con seguidor de movimiento alternativo se impulsará con un motor de velocidad constante a **150 RPM**. El seguidor debe partir de una detención, acelerar hasta una velocidad uniforme de **25 pulg/s**, mantener esta velocidad a lo largo de **1.25 pulg** de subida, después acelerar hasta la parte superior de la elevación, retornar y luego quedar en detención por **0.1 s**. la elevación total será de **3 pulg**. Determinése las especificaciones completas del diagrama de desplazamiento.

Solución:

La velocidad del eje de entrada es: $\omega = 150 \text{ RPM} = 15.708 \text{ rad/s}$

Mediante la **ecuación (3.5)** se halla la pendiente del segmento **BC** de velocidad uniforme:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\omega} = \frac{25 \text{ pulg/s}}{15.708 \text{ rad/s}} = 1.592 \text{ pulg/rad}$$

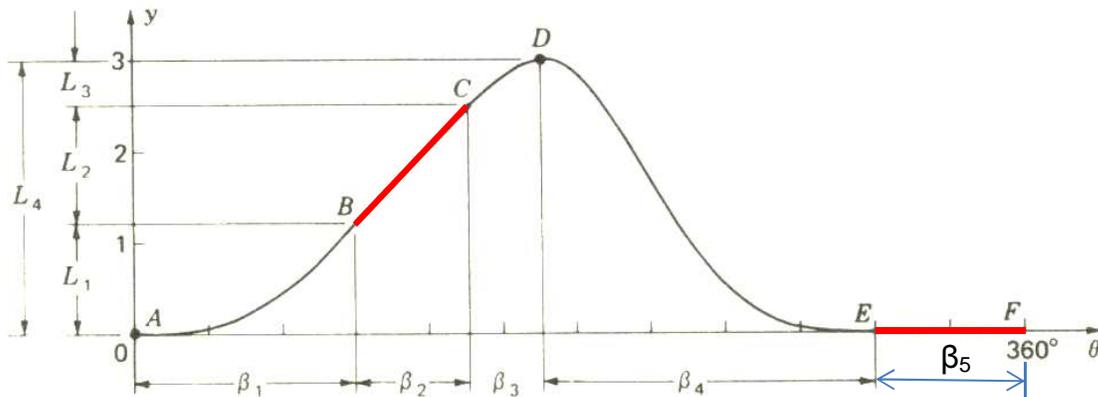
Puesto que la pendiente se mantiene constante en el curso de 1.25 pulg de subida (se trata de una recta), la rotación de leva en este segmento recto es:

$$y' = \frac{L_2}{\beta_2} \rightarrow \beta_2 = \frac{L_2}{y'} = \frac{1.25 \text{ pulg}}{1.592 \text{ pulg/rad}} = 0.785 \text{ rad} = 45^\circ$$

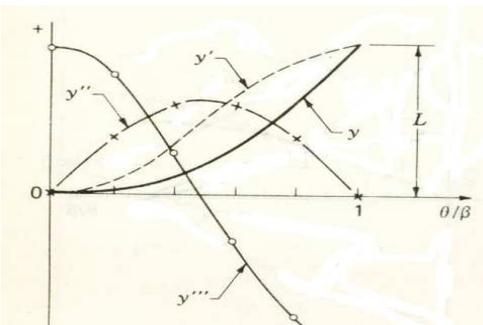
Del mismo modo se puede encontrar la rotación de leva para la detención final (segmento **EF**):

$$\beta_5 = \omega(\text{Tiempo}) = 0.1 \text{ s}(15.708 \text{ rad/s}) = 1.5708 \text{ rad} = 90^\circ$$

Con la información anterior se realiza un bosquejo general del diagrama de desplazamiento, marcando con trazos gruesos rojos los segmentos **BC** y **EF**. Las secciones con línea delgada no se conocen aun con exactitud. Ahora se compara este bosquejo con las curvas de movimiento deseado con las curvas estándar.



Para el segmento **AB** se usa la **figura 13** la cual tiene la característica de media subida y la aceleración cero en ambos extremos:



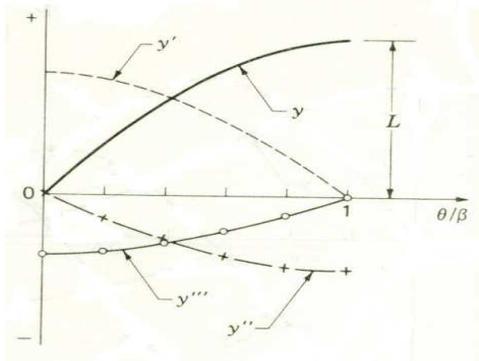
$$y = L \left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{\pi} \text{sen} \frac{\pi\theta}{\beta} \right) \text{----- (1)}$$

$$y' = \frac{L}{\beta} \left(1 - \cos \frac{\pi\theta}{\beta} \right) \text{----- (2)}$$

$$y'' = \frac{\pi L}{\beta^2} \text{sen} \frac{\pi\theta}{\beta} \text{----- (3)}$$

$$y''' = \frac{\pi^2 L}{\beta^3} \cos \frac{\pi\theta}{\beta} \text{----- (4)}$$

Para el segmento **CD** se usa la **figura 10** la cual tiene la característica de subida semiarmónica:



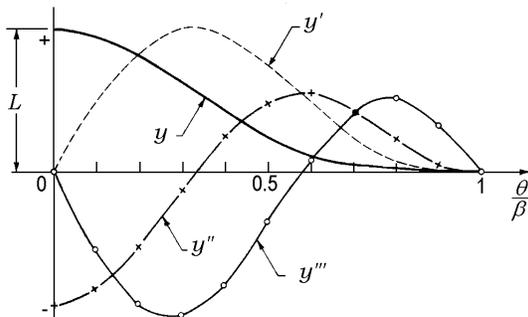
$$y = L \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{2\beta} \text{----- (5)}$$

$$y' = \frac{\pi L}{2\beta} \cos \frac{\pi\theta}{2\beta} \text{----- (6)}$$

$$y'' = -\frac{\pi^2 L}{4\beta^2} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{2\beta} \text{----- (7)}$$

$$y''' = -\frac{\pi^3 L}{8\beta^3} \cos \frac{\pi\theta}{2\beta} \text{----- (8)}$$

Para el segmento **DE** se usa la **figura 6** la cual tiene la característica de retorno armónico:



$$y = \frac{L}{2} \left[\left(1 + \cos \frac{\pi\theta}{\beta} \right) - \frac{1}{4} \left(1 - \cos \frac{2\pi\theta}{\beta} \right) \right] \text{----- (9)}$$

$$y' = -\frac{\pi L}{2\beta} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{\beta} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{2\pi\theta}{\beta} \right) \text{----- (10)}$$

$$y'' = -\frac{\pi^2 L}{2\beta^2} \left(\cos \frac{\pi\theta}{\beta} + \cos \frac{2\pi\theta}{\beta} \right) \text{----- (11)}$$

$$y''' = \frac{\pi^3 L}{2\beta^3} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{\beta} + 2 \operatorname{sen} \frac{2\pi\theta}{\beta} \right) \text{----- (12)}$$

Ahora de deben hallar los valores para los parámetros desconocidos de las ecuaciones de movimiento: L_1 , L_3 , β_1 , β_3 y β_4 . Esto se hace igualando los valores en cada frontera de la forma:

1. Al inicio de la curva $\frac{\theta}{\beta} = 0$
2. Al final de la curva $\frac{\theta}{\beta} = 1$

Las velocidades en **B**, es preciso igualar el valor de y' de la **ecuación (2)** con $\frac{\theta}{\beta} = 1$ (final de la curva) con y' del segmento **BC**:

$$y' = \frac{L}{\beta} \left(1 - \cos \frac{\pi\theta}{\beta} \right) \text{----- (2)} \Rightarrow y'_B = \frac{L_1}{\beta_1} \left[1 - \cos \pi(1) \right] = \frac{2L_1}{\beta_1}$$

Para el segmento **BC**:

$$y'_B = \frac{L_2}{\beta_2}, \text{ por lo que: } y'_B = \frac{2L_1}{\beta_1} = \frac{L_2}{\beta_2} = \frac{1.25 \text{ pulg}}{0.785 \text{ rad}} = 1.592 \text{ pulg/rad}$$

$$\text{Así: } L_1 = 0.796\beta_1 \text{----- (13)}$$

Análogamente, para igualar las velocidades en el punto **C**, se iguala el valor de y' del segmento **BC** con y' de la **ecuación (6)** con $\frac{\theta}{\beta} = 0$ (inicio de la curva):

$$y' = \frac{\pi L}{2\beta} \cos \frac{\pi\theta}{2\beta} \text{----- (6)} \Rightarrow y'_C = \frac{\pi L_3}{2\beta_3} \cos(0) = \frac{\pi L_3}{2\beta_3}$$

Para el segmento **BC**:

$$y'_C = \frac{L_2}{\beta_2}, \text{ por lo que: } y'_C = \frac{\pi L_3}{2\beta_3} = \frac{L_2}{\beta_2} = \frac{1.25 \text{ pulg}}{0.785 \text{ rad}} = 1.592 \text{ pulg/rad}$$

Así: $L_3 = 1.013\beta_3$ ----- (14)

Para igualar las aceleraciones en el punto **D**, se iguala el valor de y'' de la **ecuación (7)** con $\frac{\theta}{\beta} = 1$ (final de la curva) con y'' de la **ecuación (11)** con $\frac{\theta}{\beta} = 0$ (inicio de la curva):

$$y'' = -\frac{\pi^2 L}{4\beta^2} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{2\beta} \text{----- (7)} \Rightarrow y''_D = -\frac{\pi^2 L_3}{4\beta_3^2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} (1) = -\frac{\pi^2 L_3}{4\beta_3^2}$$

$$y'' = -\frac{\pi^2 L}{2\beta^2} \left(\cos \frac{\pi\theta}{\beta} + \cos \frac{2\pi\theta}{\beta} \right) \text{----- (11)} \Rightarrow y''_D = -\frac{\pi^2 L_4}{2\beta_4^2} \left[\cos \pi(0) + \cos 2\pi(0) \right] = -\frac{\pi^2 L_4}{\beta_4^2}$$

Por lo que: $y''_D = -\frac{\pi^2 L_3}{4\beta_3^2} = -\frac{\pi^2 L_4}{\beta_4^2}$

Aplicando la ecuación (14): $\beta_3 = 0.0844\beta_4^2$ ----- (15)

De la geometría del diagrama de desplazamientos:

$L_1 + L_3 = L_4 - L_2 = 1.75$ pulg ----- (16)

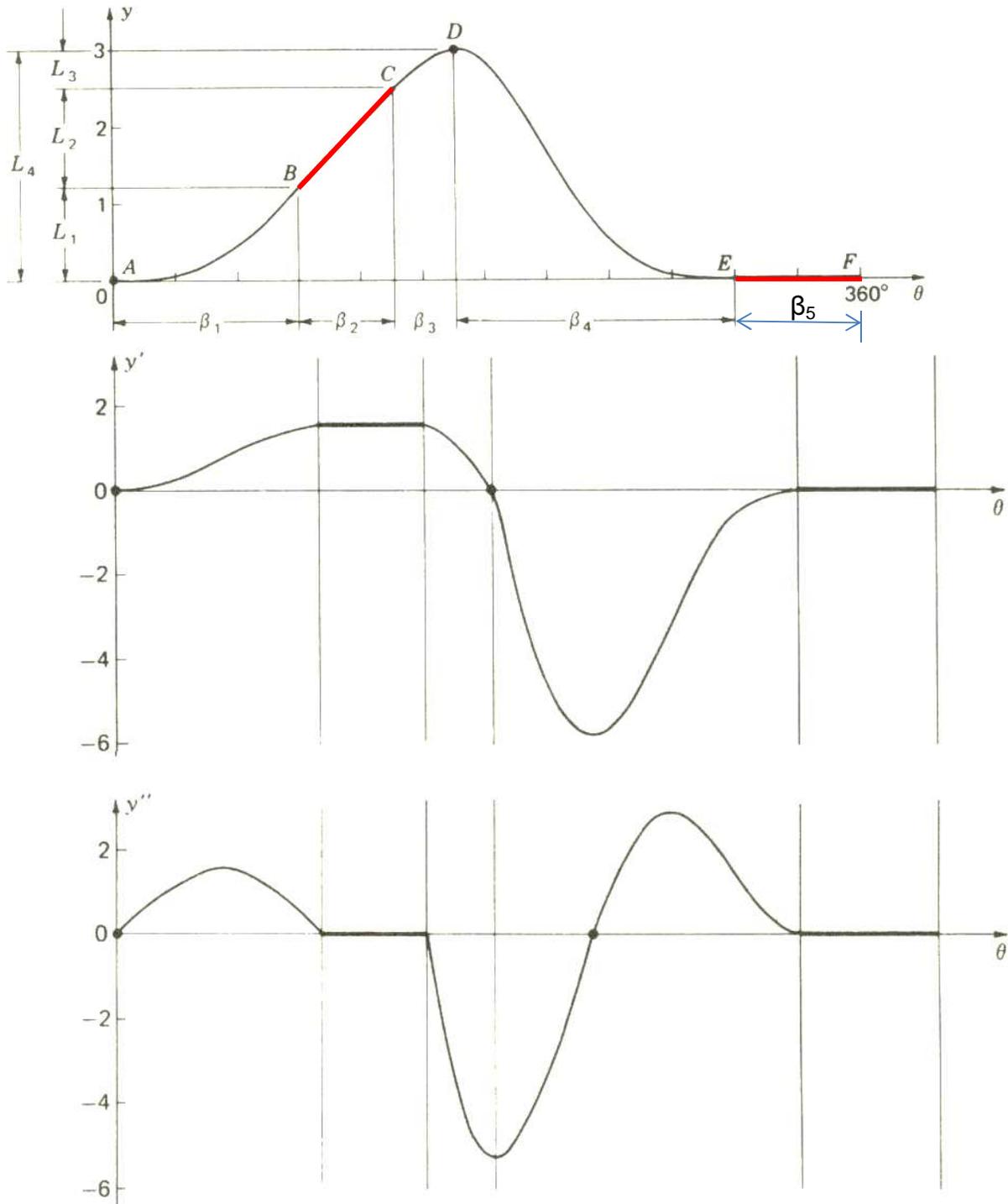
$\beta_1 + \beta_3 + \beta_4 = 2\pi - \beta_2 - \beta_5 = 3.9274$ rad ----- (17)

Resolviendo las cinco ecuaciones (13 a 17) se obtiene:

$$\begin{aligned} L_1 &= 1.264 \text{ pulg} \\ L_2 &= 1.250 \text{ pulg} \\ L_3 &= 0.486 \text{ pulg} \\ L_4 &= 3.000 \text{ pulg} \\ L_5 &= 0.000 \text{ pulg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 1.589 \text{ rad} = 91.04^\circ \\ \beta_2 &= 0.785 \text{ rad} = 45.00^\circ \\ \beta_3 &= 0.479 \text{ rad} = 27.46^\circ \\ \beta_4 &= 2.382 \text{ rad} = 136.5^\circ \\ \beta_5 &= 1.5708 \text{ rad} = 90.00^\circ \end{aligned}$$

Ahora sí se puede hacer un trazado exacto del diagrama de desplazamientos y, si así se desea, también de sus derivadas.



3.4.- DISEÑO DE LEVAS PLANAS CON APLICACIÓN DE SOFTWARE.

En este tema se usa durante el desarrollo de la unidad el software libre "Working Model 2005" del libro: Diseño de Maquinaria, Robert L. Norton, 3ª Edición.